Schattengrenzen krummer Flächen – Drehflächen, Schraubrohrfläche und Meridiankreisschraubfläche

Abstract

Typically a tangent t to the shade line e of a curved surface Φ is constructed by making use of the fact that t and the light ray l form a pair of *conjugate diameters* of the so-called DUPIN-*indicatix* of Φ at an investigated point P. This article describes a very different approach to developing such a tangent: The shade line e is defined as the intersection of Φ and a special ruled surface Ψ, which depends both on Φ and on the bundle of light rays. Ψ is introduced as *accompanying ruled surface* along e. This approach allows a simple, linear and globally applicable construction of t for rotational and helical surfaces by means of descriptive geometry. The method is also suitable for translation surfaces as well as for central illumination [4]. In a few cases Ψ is a *ruled quartic*.

Der Artikel führt kurz in die *Begleitregelflächenmethode* zur Konstruktion von Tangenten an die Eigenschattengrenzen krummer Flächen ein und zeigt anschließend ihre Anwendung auf Drehflächen, Schraubrohrfläche und Meridiankreisschraubfläche. Weitere Einzelheiten werden in [4] dargestellt. Dort sind, neben der Behandlung der Schiebflächen und des Torus bei Zentralbeleuchtung, insbesondere die Begleitregelflächen selbst Gegenstand der Untersuchung.

1 Begleitregelflächenmethode

Nur auf regulären krummen Flächenstücken kann eine Eigenschattengrenze auftreten, die in Abhängigkeit von der Lichtrichtung variiert. Für die zu untersuchenden Flächenstücke wird deshalb vorausgesetzt, dass sie nicht eben sind und zu jedem Flächenpunkt genau eine Flächennormale existiert. Außerdem beschränken wir uns vorerst auf den Fall der Parallelbeleuchtung (Abb. 1). Die Lichtrichtung wird so angenommen, dass keine Flächengebiete in so genanntem *Streiflicht* existieren.

Punkte der Eigenschattengrenze e einer Fläche Φ erhält man mit

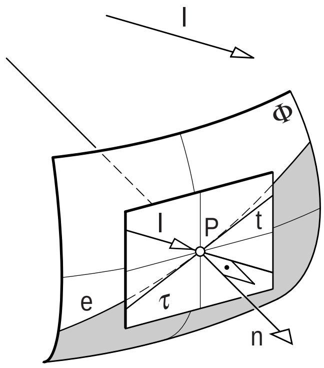

Abb. 1

Satz 1:

Bei Parallelbeleuchtung ist die Eigenschattengrenze einer regulären krummen Fläche der Ort jener Flächenpunkte, in denen die Flächennormalen zur Lichtrichtung normal sind.

Die Flächennormalen längs e erfüllen eine *konoidale Regelfläche* Ψ, deren Richtebene zur Lichtrichtung normal ist (Abb. 2). Wenn e regulär ist, was wir voraussetzen wollen, muss Ψ in einem Umgebungsstreifen von e ebenfalls regulär sein.

Mit Ψ liegt eine Hilfsfläche vor, die Φ in e (normal) schneidet. In jedem Punkt von e kann die Tangente an e folglich als

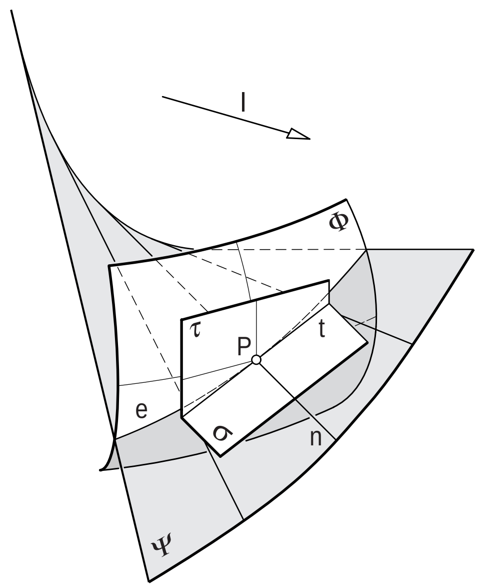

Abb. 2

Schnittgerade der entsprechenden Tangentialebenen von Φ und Ψ konstruiert werden. Im Wesentlichen läuft das darauf hinaus, dass gewisse Tangentialebenen von Ψ unter Ausnutzung der *Berührkorrelation* verfügbar gemacht werden müssen.

Mit dem Ziel, eine konstruktiv leicht beherrschbare Regelfläche durch e zu erhalten, kann es gelegentlich, etwa bei Schiebflächen, sinnvoll sein, eine andere als die Normalenfläche zu betrachten. Wir berücksichtigen das durch folgende Bezeichnung:

Def. 1:

Eine durch Geraden erzeugte Hilfsfläche, die eine krumme Fläche Φ längs der Eigenschattengrenze von Φ schneidet, heißt eine Begleitregelfläche *der Eigenschattengrenze.*

Sind die Erzeugenden der Begleitregelfläche Ψ Flächennormalen von Φ, so ist Ψ der Schnitt der Normalenkongruenz von Φ mit dem *planaren Normalenkomplex* der Lichtrichtung. Bleibt die Lichtrichtung konstant, so ist Ψ auch Begleitregelfläche aller Parallelflächen von Φ.

2 Tangenten an die Eigenschattengrenzen von Drehflächen

Bei jeder Drehfläche Φ ist die Normalenkongruenz eine Untermenge des Gebüsches durch die Drehachse a. Jede Begleitregelfläche von Φ liegt somit in der Schnittkongruenz dieses Gebüsches mit dem Normalenkomplex der Lichtrichtung. Weil beide Komplexe ersten Grades sind, erfüllt die Schnittkongruenz im Allgemeinen ein hyperbolisches Netz mit den Netzachsen a und l_∞, der Ferngeraden der Normalebenen zur Lichtrichtung ([5] S. 5 ff). Wenn die Lichtrichtung zu a normal ist, zerfällt das Netz und erfüllt eine Meridianebene.

Satz 2:

Die Begleitregelfläche einer Drehfläche bei Parallelbeleuchtung ist im Allgemeinen eine Netzfläche mit der Drehachse als Leitgerade und einer zur Lichtrichtung normalen Richtebene, das heißt sie ist ein schiefes Konoid.

Nur beim Torus hat die Normalenkongruenz neben a eine zweite einfache Leitkurve, den Mittenkreis m. Die Begleitregelfläche des Torus ist folglich eine Netzfläche durch m und wegen der gegenseitigen Lage von a, l_∞ und m von viertem Grad und siebter STURMscher Art (Abb. 3).

In der Regel weist die Normalenkongruenz einer Drehfläche Φ anstelle von m eine koaxiale *Leitdrehfläche* (Brennfläche) Θ auf. Der Meridian von Θ ist die *Evolute* des Meridians von Φ. Jede Begleitregelfläche Ψ von Φ berührt Θ längs einer Raumkurve, deren Drehriss ein Teil der Evolute ist.

Durch die Leitgerade a, die Berührung mit Θ sowie die Fernleitgerade l_∞ sind zu jeder Erzeugenden n von Ψ in drei verschiedenen Punkten die Tangentialebenen gegeben, mit deren Hilfe die Berührkorrelation längs n vervollständigt werden kann. Dabei wird die Tangentialebene im Berührpunkt

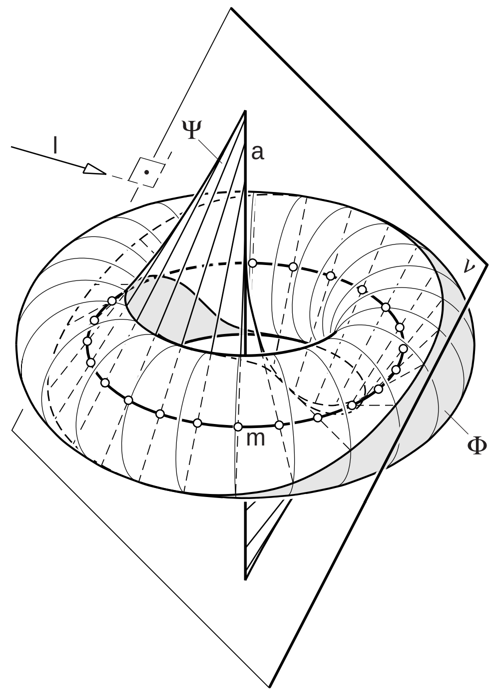

Abb. 3

M von n mit Θ durch n und die Breitenkreistangente in M aufgespannt. Zugleich ist M der Mittelpunkt des Meridiankrümmungskreises im zu n gehörenden Flächenpunkt P von Φ. Für die Vervollständigung der Berührkorrelation ist demnach unerheblich, welche Eigenschaften Θ besitzt. Die Konstruktion ist durchführbar, sobald zu jedem untersuchten Punkt von Φ ein Meridiankrümmungskreis bekannt ist.

Wenn offensichtlich die Festlegung der Berührkorrelation längs einer Erzeugenden von Ψ – und damit verbunden die Konstruktion der Tangente an die Eigenschattengrenze – nur von der Meridiankrümmung und der Drehachse a sowie l_∞ abhängig ist, kann Φ lokal durch einen entsprechenden Torus und seine Begleitregelfläche ersetzt werden. Bekanntlich gilt:

Längs des Breitenkreises durch einen allgemeinen Punkt P einer Drehfläche Φ_1 wird Φ_1 von einem koaxialen Torus Φ_2 *oskuliert*, dessen Meridian der Meridiankrümmungskreis von Φ_1 in P ist. Das heißt in P stimmt das Schattengrenzenverhalten von Φ_1 und Φ_2 jedenfalls bis zur ersten Ordnung überein. Wir begnügen uns deshalb damit, den Torus bezüglich seiner Eigenschattengrenze näher in Augenschein zu nehmen.

Torus

Zu einem allgemeinen Punkt P der Eigenschattengrenze e eines Torus Φ soll die Tangente t von e im Normalriss in der Lichtmeridianebene, kurz *Lichtmeridianriss*, konstruiert werden (Abb. 4). Die Flächennormale n durch P ist eine Erzeugende der Begleitregelfläche Ψ von Φ längs e. Die gesuchte Tangente t ist die Schnittgerade der Tangentialebenen τ von Φ und σ_P von Ψ in P. Es ist darum sinnvoll, die Berührkorrelation längs n direkt in τ zu vervollständigen.

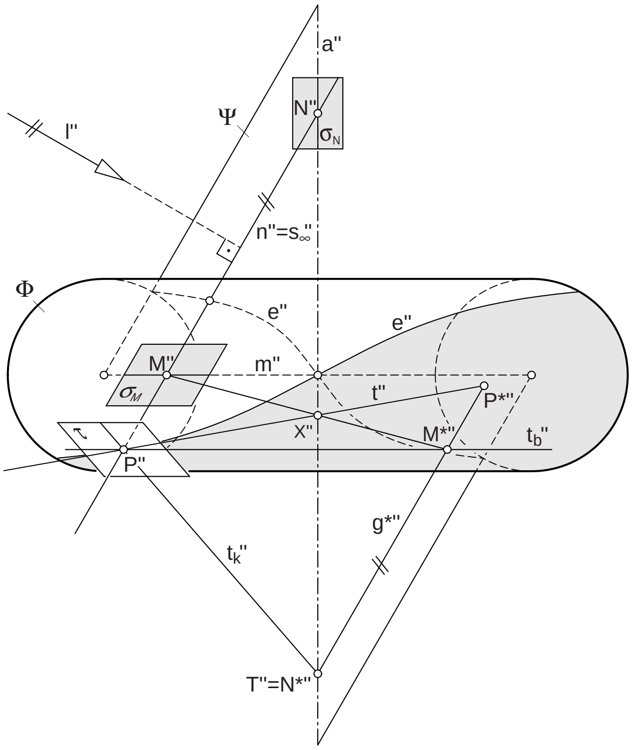

Abb. 4

Zuerst benötigt man die Spuren der drei bekannten Tangentialebenen von n in τ. Das Bild der Spur s_∞ der asymptotischen Ebene fällt in der gewählten Aufstellung in den Meridianriss von n. Die Spur der Tangentialebene σ_M in M, die durch n und den Mittenkreis m aufgespannt wird, ist die Breitenkreistangente t_b in P. Die Tangentialebene σ_N im Schnittpunkt N von n mit der Drehachse a schneidet τ in der Meridiantangente t_k.

Der Berührpunkt der asymptotischen Ebene ist der Fernpunkt von n. Damit läuft die Konstruktion auf eine Teilverhältnisübertragung, etwa mittels geeigneter Perspektivität (*Strahlensatz*), hinaus. Auf einer Hilfsgeraden g* in τ parallel zu s_∞, die etwa durch den Schnittpunkt T von t_k und a gelegt werden kann, liegen die Schnittpunkte N*=T, M* := g* $\cap$ t_b und P* := g* $\cap$ t, deren Teilverhältnis TV(N*, M*, P*) mit TV(N, M, P) übereinstimmt. Somit ist der Strahlenschnittpunkt X := NN* $\cap$ MM* ein Punkt der gesuchten Tangente t.

Wenn man beachtet, dass M und N die Hauptkrümmungsmittelpunkte und t_k sowie t_b die Krümmungstangenten von P sind, so führt das auf folgenden allgemeinen

Satz 3:

In einem Punkt P der Eigenschattengrenze e einer krummen Fläche schneiden die Tangente t von e und die Krümmungstangenten t_1 und t_2 aus jeder in der Tangentialebene von P befindlichen und zum berührenden Lichtstrahl in P orthogonalen Geraden g mit P $\notin$ g* jenes Teilverhältnis aus, das dem Teilverhältnis von P und den Hauptkrümmungsmittelpunkten K_1 und K_2 auf der Flächennormalen in P entspricht: Es ist mit P* := g* $\cap$ t, K_1* := g* $\cap$ t_2 und K_2* := g* $\cap$ t_1 dann TV(P, K_1, K_2) = TV(P*, K_1*, K_2*).*

Dieser Satz gilt unverändert auch bei Zentralbeleuchtung. Man beachte aufmerksam, dass K_1* auf der Krümmungstangente von K_2 liegt und K_2* auf t_1.

Betrachten wir erneut den Lichtmeridianriss des Torus Φ (Abb. 5): In den Äquatorpunkten von Φ vereinfacht sich die Teilverhältnisübertragung zur Konstruktion der Tangenten an die Eigenschattengrenze e von Φ durch die direkt ablesbare Lage der Krümmungstangenten. Außerdem ist das jeweilige Teilverhältnis der Äquatorpunkte mit den Krümmungsmittelpunkten im Hauptmeridian gegeben. Mit wenigen Linien erhält man so die Tangenten im elliptischen und im hyperbolischen Punkt P_e bzw. P_h.

Diese Konstruktion kann mit jener abgeglichen werden, die längs des Äquators oskulierende Drehquadriken einsetzt (Abb. 6, vgl. [6] und [2] S. 305; mögliche Umrisskonstruktionen der Drehquadriken sind gestrichelt wiedergegeben). Be-

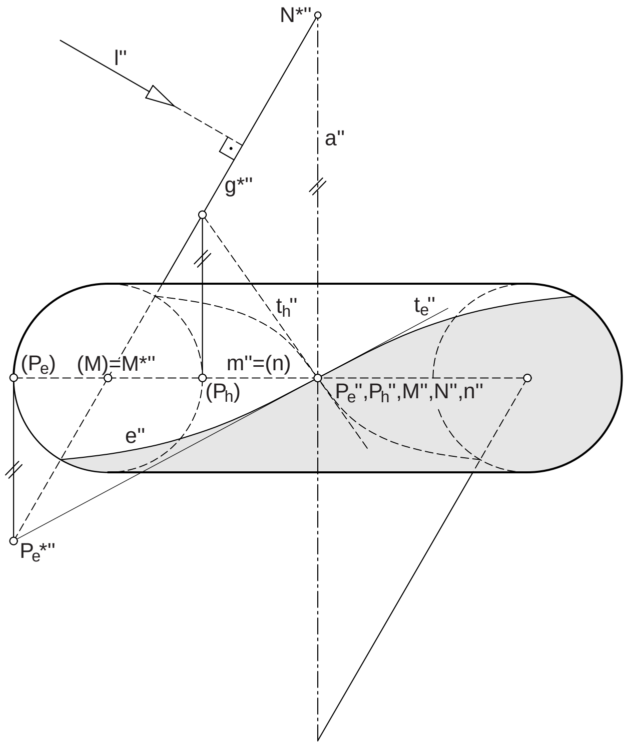

Abb. 5

kanntlich bilden sich der berührende Lichtstahl l und die Tangente t an die Eigenschattengrenze auf ein Paar konjugierter Durchmesser des Umrisses der oskulierenden Drehquadrik ab. Daraus folgt eine elementare Konstruktion konjugierter Durchmessergeraden bei Ellipse und Hyperbel.

Satz 4:

Die zu einer Durchmessergeraden l konjugierte Durchmessergerade einer Ellipse oder Hyperbel schneidet die durch einen Scheitelkrümmungsmittelpunkt gelegte Normale zu l in einem Punkt der zugehörigen Scheiteltangente.

Eine Umkehrung von Satz 4 ist die übliche Scheitelkrümmungskreiskonstruktion der Ellipse aus dem Tangenten-

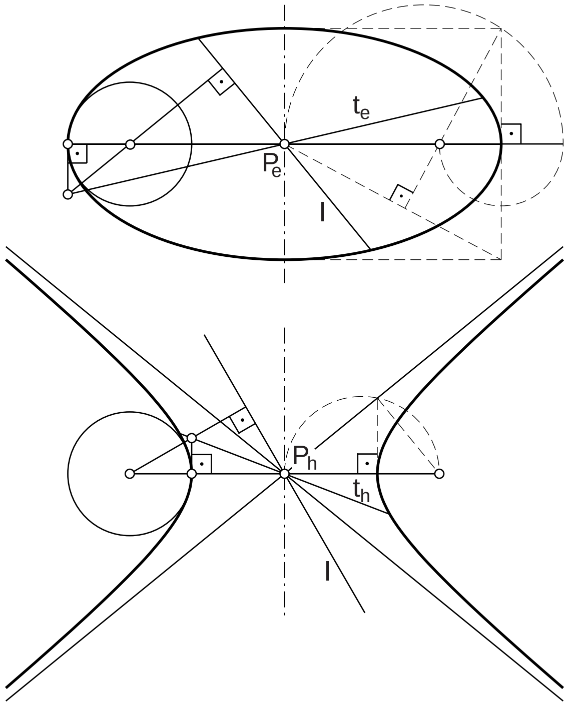

Abb. 6

rechteck. Schließlich sind die Diagonalen im Rechteck zueinander konjugierte Durchmesser der Ellipse. Bei der Hyperbel wiederum ist der zu einer Asymptoten konjugierte Durchmesser die selbe Asymptote.

3 Tangenten an die Eigenschattengrenzen von Schraubflächen

Auch die Normalenkongruenz einer Schraubfläche gehört einem linearen Komplex an, dem Normalenkomplex der Schraubung, kurz *Gewinde*. Folglich sind die Begleitregelflächen von Schraubflächen bezüglich Parallelbeleuchtung ebenfalls Netzflächen. Wie zuvor bei den Drehflächen gehört eine Netzachse, die Ferngerade l_∞, zum Normalenkomplex der Lichtrichtung. Die zweite Netzachse wird durch Einsatz des Drehfluchtprinzips greifbar. Schließlich schneiden alle Flächennormalen längs der Eigenschattengrenze einer Schraubfläche bei Parallelbeleuchtung die Achsenparallele l_0 durch den *Drehfluchtpunkt* der Lichtstrahlen (vgl. [7] S. 173 f).

Das Netz ist im Allgemeinen hyperbolisch. Wird die Lichtrichtung jedoch normal zur Schraubachse a angenommen, so fallen die Netzachsen zusammen in eine a treffende Ferngerade l_∞. Es liegt dann ein parabolisches Netz vor, bei dem die Projektivität längs l_∞ durch das Gewinde induziert wird.

Satz 5:

Die Begleitregelfläche einer Schraubfläche ist im Allgemeinen eine Netzfläche mit einer achsenparallelen Leitgeraden durch den Drehfluchtpunkt der Lichtstrahlen und einer zur Lichtrichtung normalen Richtebene, das heißt sie ist ein schiefes Konoid.

Dies impliziert Satz 2 zu den Drehflächen: Wenn der Schraubparameter null ist, fallen alle Drehfluchtpunkte in die Drehachse.

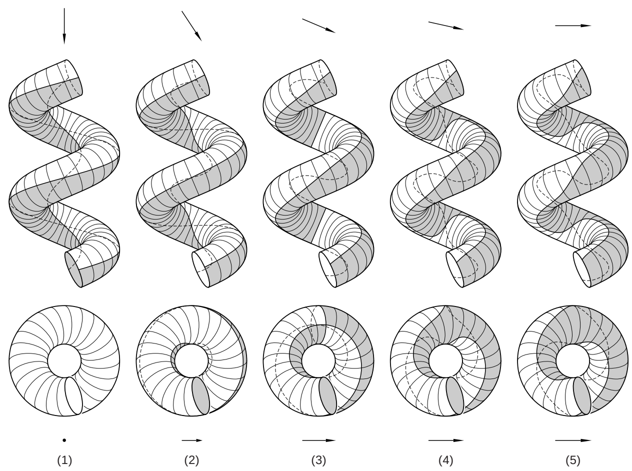

Abb. 7

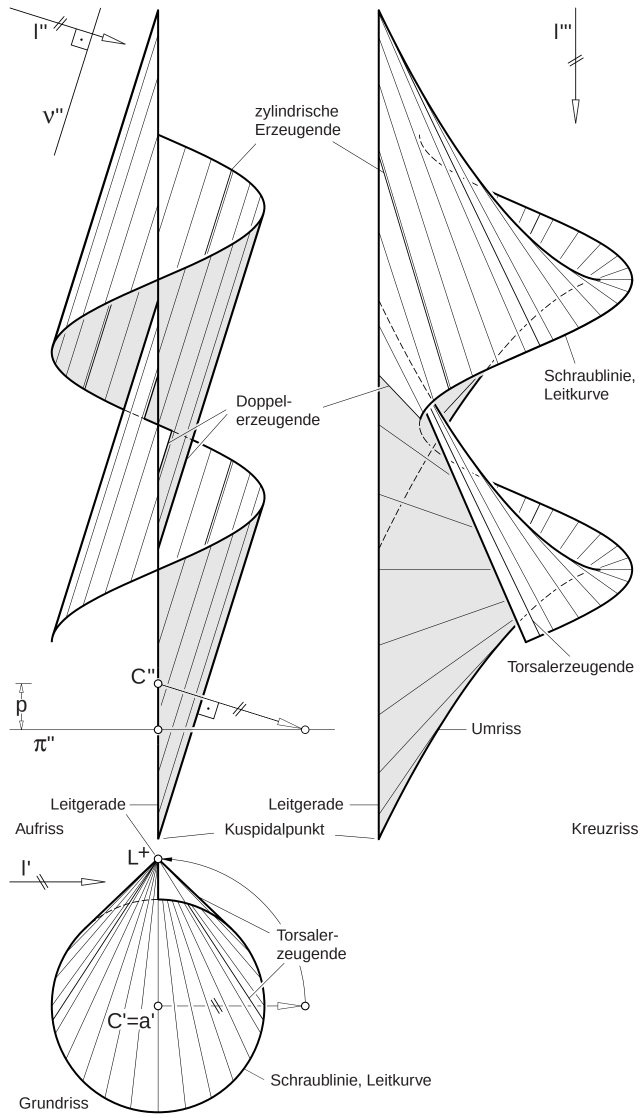

Abb. 8

Schraubrohrfläche

Die einzige Schraubfläche, deren Normalenkongruenz eine Leitkurve aufweist, ist die *Schraubrohrfläche* (Abb. 7). Jede Begleitregelfläche Ψ einer Schraubrohrfläche Φ ist folglich durch drei konstruktiv leicht beherrschbare Leitkurven gegeben: Die zwei Netzachsen (getrennt oder zusammenfallend) und die Mittenschraublinie m (Abb. 8). Für die Vervollständigung der Berührkorrelation ist folgendes bemerkenswert:

Bei jeder Erzeugenden n von Ψ schneidet die Tangentialebene in $N := n \cap l_0$ durch n und l_0 die zugehörige Tangentialebene τ von Φ in einer *Falltangente* (es wird von lotrechter Aufstellung der Schraubachse ausgegangen). Die Tangentialebene in M, die durch n und die Schraubtangente im Schnittpunkt von n und m aufgespannt wird, schneidet τ nach einer Krümmungstangente. Nach Festlegung der Berührkorrelation kann durch Teilverhältnisübertragung und unter Rückgriff auf Satz 3 der zweite Hauptkrümmungsmittelpunkt auf n bestimmt werden. In Abb. 9 erfolgt die Tangentenkonstruktion für einen allgemeinen Punkt P der Eigenschattengrenze e von Φ im Lichtmeridianriss.

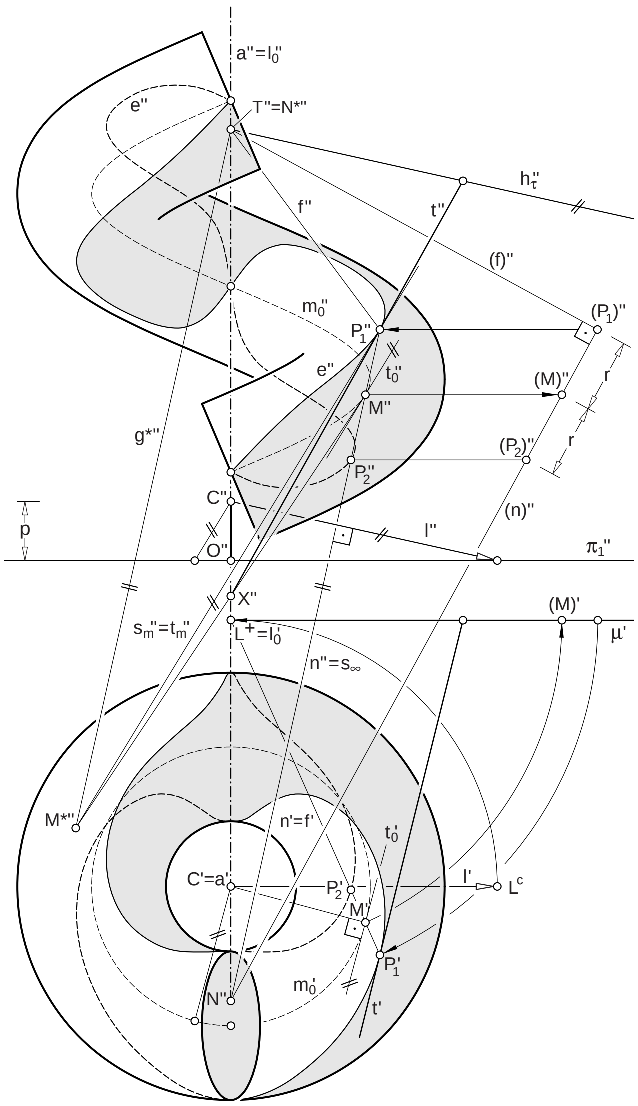

Abb. 9

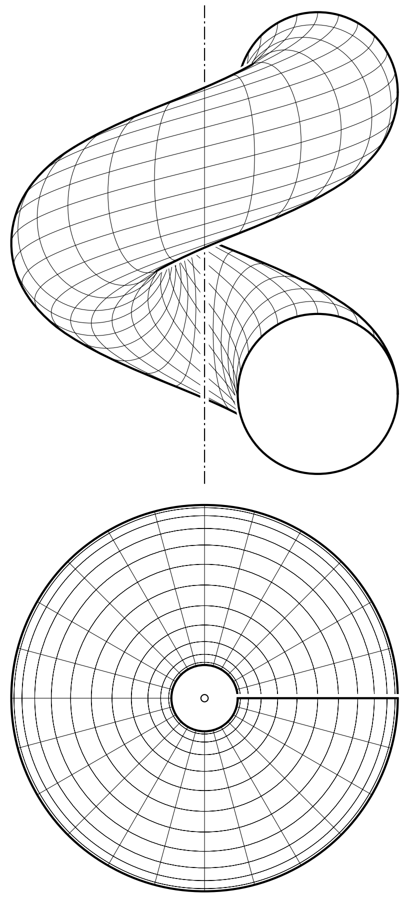

Abb. 10

Meridiankreisschraubfläche

Die Meridiankreisschraubfläche unterscheidet sich vom Torus dadurch, dass der Meridiankreis statt einer Drehung eine Schraubung erfährt (Abb. 10). Allerdings zieht diese kleine Modifikation einige konstruktive Schwierigkeiten bei der Festlegung der Begleitregelfläche nach sich. Um diese in den Griff zu bekommen, untersuchen wir zuerst die Normalenkongruenz der Meridiankreisschraubfläche Φ:

Die Flächennormalen längs eines erzeugenden Kreises k von Φ sind Gewindegeraden und gehören zugleich dem Gebüsch durch die Drehachse a_k von k an. Das Gewinde und a_k bestimmen ein Netz. Solange die Gebüschachse a_k keine Gewindegerade ist, sind die Netzachsen reell getrennt und das Netz ist hyperbolisch. Andernfalls ist das Netz parabolisch. Die Normalenfläche Ψ_k längs k wird demnach durch zwei Leitgeraden und den Leitkreis k festgelegt. Diese Feststellung kann auf alle Kreisschraubflächen ausgeweitet werden und gilt auch bei Drehung bzw. Schiebung:

Satz 6:

Die Normalenfläche längs eines erzeugenden Kreises einer zyklischen Bewegfläche ist im Allgemeinen eine Regelfläche vierten Grades siebter STURM*scher Art.*

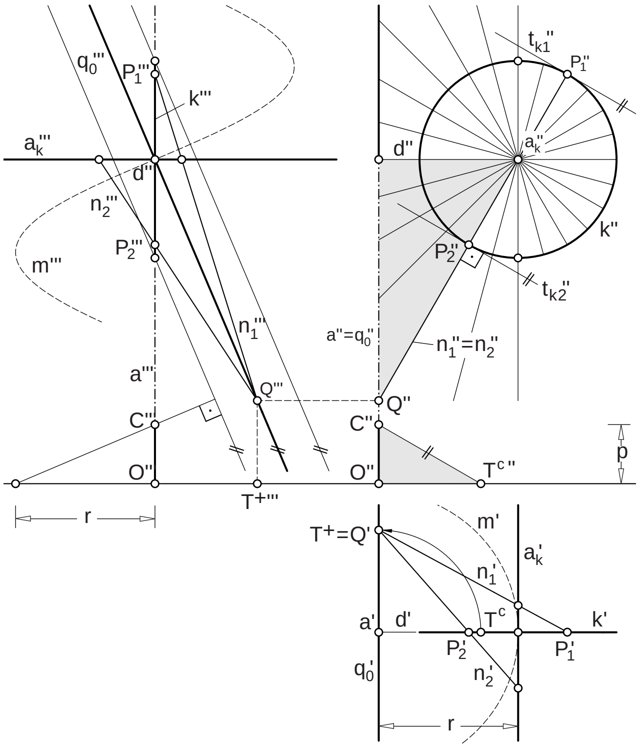

Abb. 11

Für ein weiteres Vorgehen ist es nötig, die zweite Leitgerade von Ψ_k aufzuspüren: Genau wie die Meridiankreisschraubfläche ist Ψ_k zu jener Durchmessergeraden d von k axialsymmetrisch, welche die Schraubachse a orthogonal schneidet. Somit ist d die Doppelerzeugende von Ψ_k und die gesuchte Leitgerade q_0 normal zu d.

Weil q_0 zur Doppelkurve von Ψ_k gehört, schneiden sich Paare von Flächennormalen in einem Punkt von q_0. Greift man zwei solche Erzeugende n_1 und n_2 heraus, deren Schnittpunkte P_1 und P_2 mit k auf einem Durchmesser von k liegen, so spannen sie eine Ebene durch a_k auf. Diese Ebene schneidet die zu d normale Meridianebene φ in einer Höhenlinie (Abb. 11). Zugleich müssen die Grundrissbilder von n_1 und n_2 durch den gemeinsamen Drehfluchtpunkt T^+ der zueinander parallelen Kreistangenten in P_1 und P_2 verlaufen. Daraus folgt: n_1 und n_2 schneiden φ in einem gemeinsamen Punkt Q und q_0 befindet sich in φ.

Die Tangentialebenen von Φ in den Endpunkten des zu a parallelen Durchmessers von k sind zueinander parallel. Demnach sind auch die Erzeugenden von Ψ_k in diesen Punkten zueinander parallel und schneiden sich im Fernpunkt von q_0. Weil die Bahnkurven der betreffenden Punkte von k zur Mittenlinie m von Φ kongruent sind, kann formuliert werden:

Satz 7:

Die Normalenfläche längs eines erzeugenden Kreises einer Meridiankreisschraubfläche besitzt neben der Drehachse des Kreises eine zweite Leitgerade, nämlich die Schnittgerade der Bahnnormalebene des Kreismittelpunktes mit der zur Kreisebene normalen Meridianebene.

Wird Ψ_k derselben Schraubung wie k unterworfen, so entsteht als Hüllfläche der Schraublagen von Ψ_k die Schraubfläche Θ. Folglich ist Θ die Brennfläche der Normalenkongruenz von Φ. In jeder Schraublage von Ψ_k berühren sich Ψ_k und Θ längs einer immer gleichen Flächenkurve c von Ψ_k, die *Eingriffslinie* oder *Charakteristik* genannt wird ([3] S. 194). Verschraubt man c, so entsteht Θ. Die gemeinsamen Tangentialebenen von Ψ_k und Θ längs c enthalten demnach jeweils eine Bahntangente der Schraubung.

Jede Begleitregelfläche Ψ von Φ berührt die Brennfläche Θ der Normalenkongruenz von Φ längs einer nicht näher spezifizierten Kurve. Jede Erzeugende n von Ψ gehört jedoch auch einer Schraublage von Ψ_k an, weshalb der Berührpunkt K von n mit Θ auf c liegt. Für die Vervollständigung der Berührkorrelation wird es also darum gehen, $K \in c$ auf Ψ_k zu bestimmen. Über die Schraubtangente in K und unter Rücksicht auf Satz 5 sind dann drei Tangentialebenen längs n bekannt.

Um den konstruktiven Zugang zu vereinfachen bietet es sich an, analog zum Begriff *Zirkularprojektion* ([7] S. 68), den Begriff *Schraubprojektion* einzuführen. Dies geschieht allerdings nicht mit dem Ziel, eine Abbildung zu produzieren, die dann allgemein *Schraubriss* heißen könnte, sondern um die Kontur von Ψ_k unter Schraubprojektion zu untersuchen. Schließlich stimmt diese Kontur mit der Charakteristik c überein.

Def. 2:

Eine Abbildungsvorschrift, deren Projektionslinien die Bahnkurven einer Schraubung um die Achse a mit dem Schraubparameter p sind, heißt Schraubprojektion *um die Achse a mit dem Schraubparameter p. Ein Punkt K einer Fläche heißt* Konturpunkt bezüglich Schraubprojektion*, wenn die Tangentialebene in K die Schraubtangente von K enthält.*

Jeder Punkt einer Schraubfläche ist ein Konturpunkt bezüglich Schraubprojektion (zur selben Schraubung). Unter Zuhilfenahme des Drehfluchtprinzips wird Def. 2 auch bei anderen Flächen erfüllt, wenn die Drehfluchtspur der Tangentialebene von K den Grundriss von K enthält. Diesen bekannten Sachverhalt lesen wir als

Satz 8:

Fällt in einem Punkt K einer Fläche der Grundriss der Flächennormalen in die Drehfluchtspur der Tangentialebene von K, so ist K ein Konturpunkt bezüglich Schraubprojektion.

Das kann nun folgendermaßen ausgenutzt werden: Die Drehfluchtspuren aller Tangentialebenen längs einer Erzeugenden n der Normalenfläche Ψ_k enthalten den Drehfluchtpunkt N^+ von n. Die Flächennormalen längs n bilden dagegen ein *Normalenparaboloid* Γ ([5] S. 69). Im Grundriss hüllen die Bilder der Flächennormalen längs n in der Regel eine Umrissparabel u' ein ([7] S. 29). Flächennormalen von Ψ_k durch Konturpunkte bezüglich Schraubprojektion zeigen sich im Grundriss folglich als Tangenten aus N^+ an u'. Dafür gibt es zu jeder Erzeugenden von Ψ_k im algebraischen Sinne zwei Lösungen.

Wir werden nun die Umrissparabel u' von Γ im Grundriss unter Hinweis auf ihre Leitlinie und mithilfe eines Parabelpunktes mit Tangente bestimmen. Dazu ist es nötig, zuerst ein Berührparaboloid Γ_B längs n festzulegen (Abb. 12 am Hauptmeridiankreis k):

Setzt man die Leitgeraden q_0 und a_k von Ψ_k als Erzeugende von Γ_B ein, so ist die Richtebene von Γ_B grund- und aufrissprojizierend. In P findet man eine weitere Erzeugende g_P von Γ_B über die Tangentialebene σ_P von Ψ_k. Die Tangentialebene σ_P wird durch n und die Kreistangente t_k aufgespannt. Eine Höhenlinie h_P von σ_P verläuft durch den Schnittpunkt von t_k mit der Doppelerzeugenden d und den Schnittpunkt von n mit a_k.

Besonders nützlich für das weitere Vorgehen ist die horizontale Erzeugende h von Γ_B aus der Schar von n. Sie befindet sich in der Höhenebene durch a_k und schneidet q_0 im Fußpunkt D von d sowie g_P im Schnittpunkt von g_P mit h_P. Die Erzeugende h ist deshalb so wertvoll, weil die Leitlinie von u' in h' fällt.

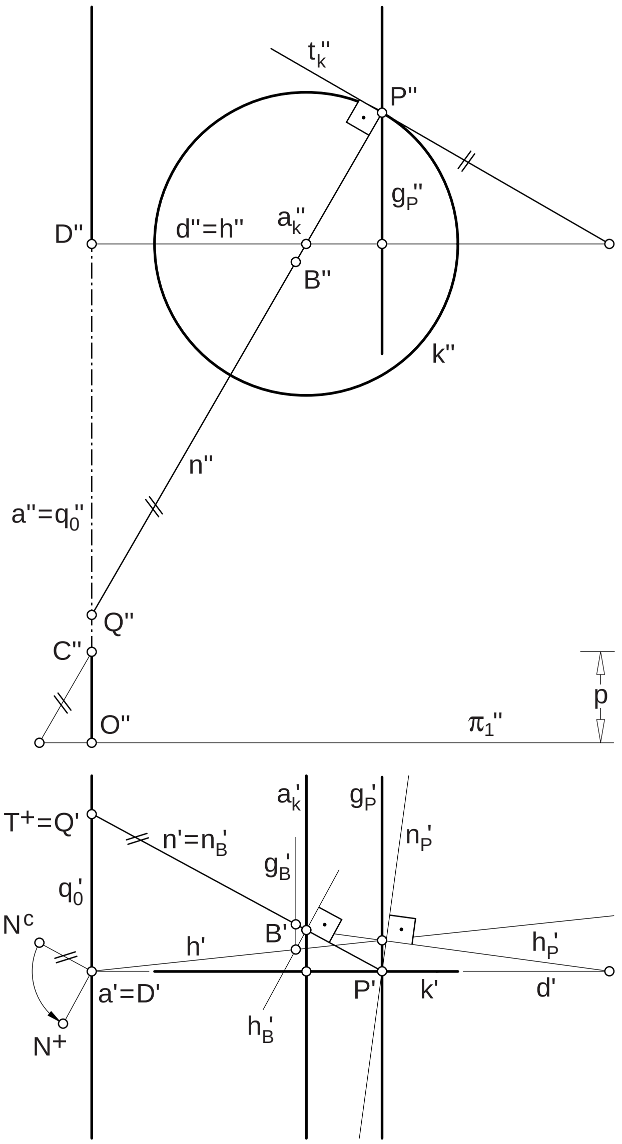

Abb. 12

Dies wird in [4] S. 188 f, 191 und194 f begründet.

Um einen Punkt B' von u' und die dazugehörige Tangente n_B' zu erhalten, suchen wir den Konturpunkt B von Γ zu n auf. Dabei muss das Grundrissbild der Flächennormalen n_B von Ψ_k (und Γ_B) in B (mithin eine Erzeugende von Γ) mit n' zur Deckung kommen. Das heißt die Grundrissbilder aller Höhenlinien der Tangentialebene σ_B von Γ_B in B müssen zu n' orthogonal sein. Legt man eine solche Höhenlinie h_B durch den Schnittpunkt von n mit a_k vor, so trifft h_B die horizontale Erzeugende h in einem Punkt jener Erzeugenden g_B von Γ_B, die n im Berührpunkt B von σ_B schneidet (Abb. 12).

Im Wesentlichen benötigt man außer der Leitlinie h' noch den Brennpunkt F von u' (Abb. 13). Dabei ist n' = n_B' Symmetriegerade zu F und dem Fußpunkt des Lotes aus B' zu h'.

Zu guter Letzt werden jetzt die Parabeltangenten n_{K1}' und n_{K2}' aus N^+ an u' konstruiert ([1] S. 208 f). Ein Hilfskreis um N^+ durch F schneidet h' in den Gegenpunkten G_1 und G_2 (Abb. 14). Die Geraden FG_1 und FG_2 sind zu n_{K1}' bzw. n_{K2}' normal. Nach Satz 8 sind n_{K1}' und n_{K2}' die Grundrissbilder der Flächennormalen n_{K1} und n_{K2} von Ψ_k in den Konturpunkten K_1 und K_2 bezüglich Schraubprojektion auf der Er-

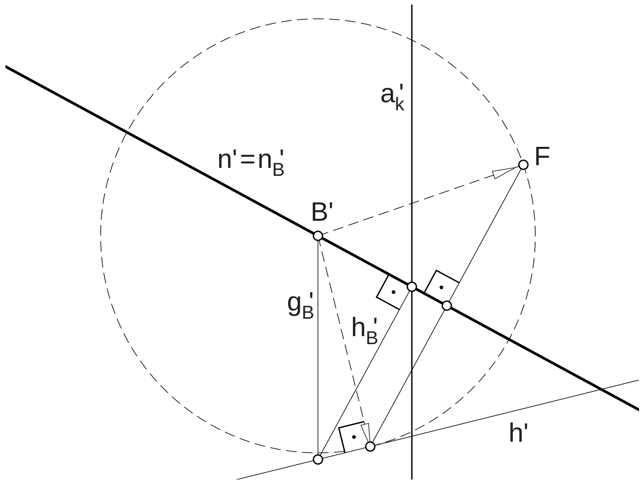

Abb. 13

zeugenden n von Ψ_k. (Die Konturpunkte bezüglich Schraubprojektion auf der Doppelerzeugenden d von Ψ_k werden in [4] S. 198 gesondert behandelt.)

Die Konstruktion der Tangente an die Eigenschattengrenze e der Meridiankreisschraubfläche Φ in einem Punkt P von e läuft nun wieder auf eine Teilverhältnisübertragung in der Tangentialebene τ von P hinaus. Dabei ist folgender Zusammenhang erwähnenswert:

In P spannen die Bahntangente von P und die Meridiankreistangente t_k die Tangentialebene τ auf. Die Erzeugende n der Begleitregelfläche längs e durch P ist Bahnnormale zu jedem ihrer Punkte. Folglich sind auch die Bahntangenten in den Konturpunkten bezüglich Schraubprojektion zu τ parallel.

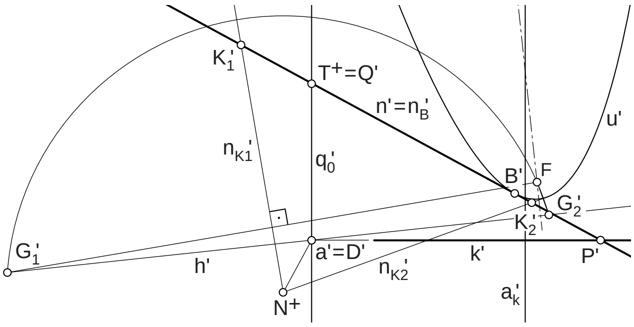

Abb. 14

Schlussbemerkungen

Um Tangenten an die Eigenschattengrenzen krummer Flächen in den Griff zu bekommen wird in der Regel *lokal* das Instrumentarium der konstruktiven Differentialgeometrie eingesetzt. Dabei werden Zusammenhänge quadratischer Form ausgenutzt. Dagegen erfasst die hier vorgestellte *Begleitregelflächenmethode* Eigenschattengrenzen *global* als Schnittkurven und führt zu linearen Lösungen. Die Methode greift, sobald man die Normalenkongruenz der untersuchten Fläche konstruktiv beherrscht. Bei nächster Gelegenheit soll ergänzend vorgeführt werden, dass auch der Einsatz solcher Begleitregelflächen sinnvoll sein kann, deren Erzeugenden im Allgemeinen keine Flächennormalen sind.

Irgend zwei Lagen einer Kurve im Raum lassen sich stets durch eine Schraubung ineinander überführen ([7] S. 158). Diese fundamentale Eigenschaft der Schraubung muss auch für zwei benachbarte Lagen der erzeugenden Kurve k einer allgemeinen Bewegfläche Φ gelten, woraus folgt: Ist P ein Punkt der Eigenschattengrenze von Φ, so kann immer eine Kreisschraubfläche gefunden werden, die Φ in P oskuliert und deren erzeugender Kreis der Krümmungskreis von k ist. Bei der Betrachtung der Meridiankreisschraubfläche wurde bereits skizziert, dass jede Kreisschraubfläche mit der Begleitregelflächenmethode erfasst wird. Konstruktiv ist das mit einigem Aufwand verbunden. Es bleibt zu vergleichen, ob hier der Einsatz der DUPIN*schen Indikatrix* nicht zweckmäßiger ist.

Für Bewegflächen, insbesondere für die vorgeführten Spezialfälle, ist die *Begleitregelflächenmethode* auch zur Bestimmung von *Isophotentangenten* verwendbar und kann gelegentlich zu durchaus einfachen Konstruktionen Anlass geben.

Literatur

[1] BEREIS, RUDOLF: Darstellende GEOMETRIE I; AKADEMIE VERLAG, BERLIN 1964

[2] BRAUNER, HEINRICH: Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie; Springer-Verlag, Wien, New York 1986

[3] HOHENBERG, FRITZ: Konstruktive Geometrie in der Technik; 3. verb. Aufl. Springer-Verlag, Wien 1966

[4] LORDICK, DANIEL: Konstruktion der Schattengrenzen krummer Flächen mithilfe von Begleitflächen; Shaker, Aachen 2001 (zugl. Karlsruhe, Univ., Diss. 2001)

[5] MÜLLER, EMIL; KRAMES, JOSEF LEOPOLD: Konstruktive Behandlung der Regelflächen; in: Vorlesungen über Geometrie, Band III; Franz Deuticke, Leipzig, Wien 1931

[6] STACHEL, HELLMUTH: Zum Umriss der Drehflächen; in: Anzeiger der math.-naturw. Klasse der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Nr. 10; Wien 1972

[7] WUNDERLICH, WALTER: Darstellende Geometrie II; Bibliographisches Institut, Mannheim 1967

Daniel Lordick
Institut für Geometrie
Technische Universität Dresden
Zellescher Weg 12-14, D 01096 Dresden
e-mail: lordick@math.tu-dresden.de